

附录 1：极大似然估计和马尔科夫链蒙特卡洛方法无法估计分数 CIR

模型参数的说明

在极大似然估计中，序列 $\{x_t\}$ 服从某一随机过程，设其对数似然函数为 $\ln L(\theta) = \sum_{t=1}^{n-1} \ln p(x_{t+1} | x_t, \theta, \Delta t)$ ，若随机过程满足马尔可夫性，可由转移概率密度获得联合分布，得到模型的极大似然估计值。拓展至分数 CIR 模型，依据 Araneda (2021) 得到分数 CIR 过程的转移概率密度，但分数布朗运动不具有马尔可夫性，无法通过转移概率密度获得分数 CIR 过程的联合分布。此外，若随机过程增量服从高斯分布且独立，可以通过高斯分布的协方差获取其有限维联合分布，但分数布朗运动的增量不满足增量独立，无法通过高斯分布的协方差获取其有限维联合分布。因此，在分数布朗运动不具有马尔可夫性和增量独立性的条件下，极大似然估计法无法使用。

在马尔科夫链蒙特卡洛方法中，若随机过程满足马尔可夫性，参数的后验分布密度函数 $f(\theta | \tilde{x})$ 可以通过式 (1) 得到：

$$f(\theta | \tilde{x}) = \frac{f(\tilde{x} | \theta) f(\theta)}{\int f(\tilde{x} | \theta) f(\theta) d\theta} \propto f(\tilde{x} | \theta) f(\theta) \quad (1)$$

其中， $f(\theta)$ 是 θ 的联合先验分布密度函数， $f(\tilde{x} | \theta)$ 如式 (2) 所示。

$$f(\tilde{x} | \theta) = \prod_{i=2}^n f(x^i | x^{i-1}, x^{i-2}, \dots, x^1, \theta) f(x^1 | \theta) \quad (2)$$

分数 CIR 过程不具有马尔可夫性，无法获取式 (2) 的表达式，进而不能得到参数的后验分布密度函数，因此本文无法使用马尔科夫链蒙特卡洛方法进行参数估计。对于不满足马尔可夫性的随机过程，有两种转换方式使上述参数估计方法可以使用：一是证明随机过程仍服从高斯分布，运用高斯分布的协方差得到联合概率分布（余卫军，2004）；二是将非鞅过程转换为鞅过程，再对模型参数进行估计（Laurini 等，2013），但分数 CIR 过程不满足高斯分布，且鞅过程转换困难，故难以使用马尔科夫链蒙特卡洛方法进行参数估计。

附录 2：间接推断估计量一致性的证明过程

根据 Gouriéroux 和 Monfort (1996)，辅助模型估计量 $f_t^{aux}(x_t|\theta')$ 满足以下 5 个条件，间接估计量具有一致性^①且服从渐近正态分布。

(1) 当 $T \rightarrow \infty$ ，函数 $\sum_{t=1}^T f_t^{aux}(x_t^s|x_{t-\Delta t}^s, \theta') \rightarrow \sum_{t=1}^\infty f_t^{aux}(\theta, \theta')$ ，其中 $\sum_{t=1}^\infty f_t^{aux}(\theta, \theta')$ 为确定性函数；

(2) $b(\theta) = \arg \max_{\theta'} \sum_{t=1}^\infty f_t^{aux}(\theta, \theta')$ 有唯一最大值；

(3) f_T^{aux} 与 f_∞^{aux} 均关于 θ' 可微， $\frac{\partial \sum f_\infty^{aux}}{\partial \theta'}(\theta, \theta') = \lim_T \frac{\partial \sum f_T^{aux}}{\partial \theta'}(x_T^s(\theta)|x_{T-\Delta t}^s, \theta')$ ；

(4) f_∞^{aux} 的一阶导数有唯一解 $b(\theta)$ ，即 $\frac{\partial \sum f_\infty^{aux}}{\partial \theta'}(\theta, \theta') = 0 \Rightarrow \theta' = b(\theta)$ ；

(5) $\theta' = b(\theta)$ 有唯一解。

满足上述条件的间接估计量的一致分布为：

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{fin} - \theta_0) \xrightarrow{d} N[0, W(S, \Omega)] \quad (1)$$

其中， $W(S, \Omega) = (1 + \frac{1}{S})[\frac{\partial b^T}{\partial \theta}(\theta_0)\Omega \frac{\partial b}{\partial \theta^T}(\theta_0)]^{-1} \frac{\partial b^T}{\partial \theta}(\theta_0)\Omega \Omega^{*-1} \Omega \frac{\partial b}{\partial \theta^T}(\theta_0)[\frac{\partial b^T}{\partial \theta}(\theta_0)\Omega \frac{\partial b}{\partial \theta^T}(\theta_0)]^{-1}$ ，

θ_0 为参数真实值， S 是模拟序列生成的次数，函数 $b(\theta)$ 满足： $b(\theta) = \arg \max_{\theta'} E_{\theta} f_t^{aux}(x_t|\theta')$ 。

证明间接估计量的一致性：

考虑 $\hat{\theta}_{aux}$ 和 $\hat{\theta}_{sim}(\theta)$ ，在条件 (1)、(3)、(4) 下，有：

$$\hat{\theta}_{aux} = \arg \max_{\theta'} \sum_{t=1}^T f_t^{aux}(x_t|\theta') \rightarrow \arg \max_{\theta'} \sum_{t=1}^\infty f_t^{aux}(\theta_0, \theta') = b(\theta_0) \quad (2)$$

$$\hat{\theta}_{sim}(\theta) = \arg \max_{\theta'} \sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^T f_t^{aux}(x_t^s(\theta)|x_{t-\Delta t}^s, \theta') \rightarrow \arg \max_{\theta'} S \sum_{t=1}^\infty f_t^{aux}(\theta, \theta') = b(\theta) \quad (3)$$

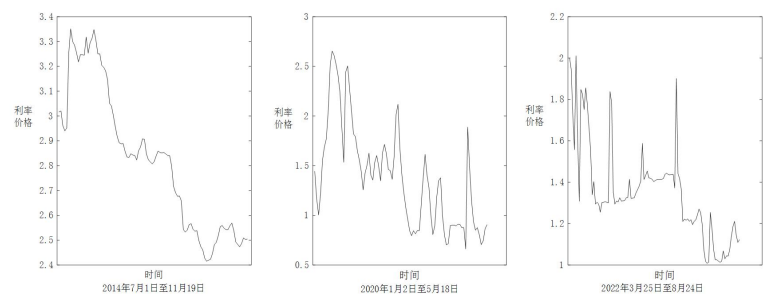
因此 $\hat{\theta}_{aux}$ 收敛至 $b(\theta_0)$ ， $\hat{\theta}_{sim}(\theta)$ 收敛至 $b(\theta)$ 。

在条件 (2)、(5) 下，有：

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{fin} &= \arg \min_{\theta'} (\hat{\theta}_{aux} - \hat{\theta}_{sim}(\theta))^T \Omega (\hat{\theta}_{aux} - \hat{\theta}_{sim}(\theta)) \\ &\rightarrow \arg \min_{\theta'} (b(\theta_0) - b(\theta))^T \Omega (b(\theta_0) - b(\theta)) \\ &= \{\theta : b(\theta) = b(\theta_0)\} \\ &= \theta_0 \end{aligned} \quad (4)$$

证毕。

① 一致性指在模拟次数 S 确定，时间长度 T 趋于无穷大的条件下，求出的估计量无限逼近于真实值，即 $\hat{\theta}_{fin} \rightarrow \theta_0$ a.s. $T \rightarrow \infty$ 。

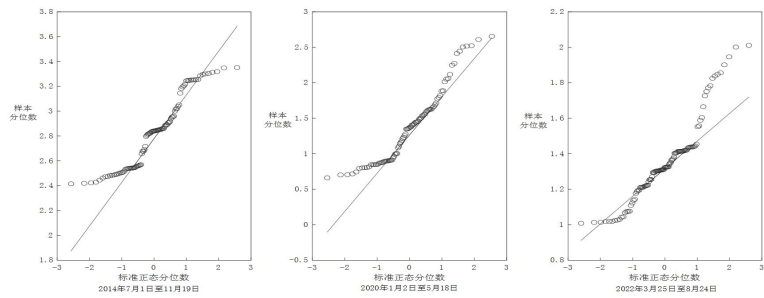


附图 1：隔夜拆放利率走势图

附表 1 隔夜拆放利率描述性统计

数据年份	2014 年	2020 年	2022 年
样本量	98.00	90.00	106.00
均值	2.82	1.38	1.35
最大值	3.35	2.65	2.01
最小值	2.42	0.66	1.01
中位数	2.84	1.37	1.32
标准差	0.29	0.52	0.23
偏度	0.31	0.70	0.89
峰度	-1.14	-0.31	0.65

数据来源：Wind。



附图 2：隔夜拆放利率 Q-Q 图

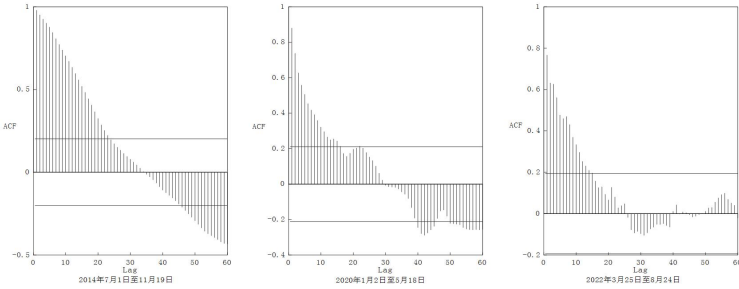
由附图 2 可知，2014 年 Q-Q 图中散点围绕理论正态分布直线大幅波动，上下两端存在不同程度的偏斜，散点与直线差异越来越大。2020 年 Q-Q 图不与理论正态分布直线重合，上端存在波动，下端不断偏离直线，约 1/3 的散点与直线值存在较大差异。2022 年 Q-Q 图中散点围绕理论正态分布直线轻微波动，但下端波动幅度变大，上端极度偏离直线，散点与直线差异较大。在描述性统计基础上，通过分析三段序列 Q-Q 图，判定三段序列不服从正态分布。

附表 2 隔夜拆放利率平稳性检验

数据	ADF 统计量	滞后阶数	P 值	结论
隔夜拆放利率（2014 年）	-3.6418	4	0.03321	平稳

隔夜拆放利率（2020 年）	-3.9573	4	0.01503	平稳
隔夜拆放利率（2022 年）	-3.5781	4	0.03848	平稳

由附表 2 可知，三段隔夜拆放利率序列均在 5%的水平下拒绝 ADF 检验原假设，因此三段序列中不存在单位根，序列平稳，可以用 R/S 分析法估计赫斯特指数。



附图 3：隔夜拆放利率（日频率）60 阶自相关图

由附图 3 知，2014 年和 2020 年的隔夜拆放利率序列存在拖尾现象，至 60 阶仍具有绝对值较大的 ACF 值，且自相关性随距离变远下降缓慢，因此这两段隔夜拆放利率在对应时间范围内存在较明显长记忆性，2022 年的隔夜拆放利率序列至 15 阶具有大于 0.2 的 ACF 值，存在自相关性，但自相关性比 2014 年和 2020 年序列弱，因此 2022 年的序列存在长记忆性，但相对较弱。

附表 3 2014 年 40 次目标模型参数间接推断估计的实证结果, $H_1 = 0.8099$

次数	k_1'	μ_1'	σ_1'
1	2.5363	2.8199	0.3459
2	0.0280	2.0374	0.0336
3	2.4711	2.8476	0.3433
4	0.1205	2.2472	0.2453
5	2.4292	2.8711	0.3399
6	0.7788	2.7139	0.3815
7	2.5445	2.8205	0.3465
8	2.6608	2.8026	0.3414
9	0.0198	0.5933	0.0574
10	2.5923	2.8138	0.3440
11	2.6117	2.8105	0.3430
12	0.1314	2.0713	0.1668
13	2.5935	2.8140	0.3409
14	2.5722	2.8018	0.3544
15	0.3552	2.6447	0.4864
16	2.4733	2.8464	0.3435
17	2.4470	2.8650	0.3405
18	0.5673	2.7230	0.3790
19	2.4450	2.8651	0.3411
20	2.3260	2.8945	0.3687
21	0.3406	2.5483	0.2540
22	2.3070	2.8981	0.3700
23	2.7417	2.7823	0.3387
24	2.4633	2.8488	0.3437
25	2.4896	2.8858	0.3501
26	2.5497	2.9399	0.3485
27	0.0342	1.5829	0.0338
28	2.5142	2.9461	0.3524
29	2.6458	2.7992	0.3418
30	2.6645	2.7909	0.3438
31	3.0274	2.7125	0.3253
32	2.4829	2.8393	0.3452
33	0.2417	1.6453	0.1825
34	2.3654	2.8892	0.3664
35	2.621	2.8050	0.3419
36	2.6039	2.8045	0.3440
37	2.4460	2.8644	0.3414
38	5.3494	3.0151	0.0097
39	3.3259	2.6202	0.3220
40	2.3347	2.8924	0.3447
均值	2.0563	2.6503	0.3061
标准差	1.1570	0.4670	0.1050

注: k_1' 为均值回复速度, μ_1' 为长期均值, σ_1' 为波动率, H_1 为赫斯特指数。

附表 4 2020 年 40 次目标模型参数间接推断估计的实证结果, $H_2 = 0.8723$

次数	k_2'	μ_2'	σ_2'
1	20.0306	1.4704	2.3754
2	19.9056	1.4695	2.3613
3	17.9765	1.4144	2.9442
4	19.9330	1.4283	2.4971
5	16.9307	1.4016	2.9388
6	16.0438	1.4324	3.1646
7	16.9397	1.4287	2.9947
8	18.0198	1.4148	2.9833
9	18.0238	1.3939	2.8780
10	17.6774	1.4250	2.9095
11	17.6662	1.4226	2.9255
12	17.9175	1.4118	2.9117
13	18.0668	1.4007	2.8231
14	18.0699	1.4553	2.8453
15	17.8902	1.4149	2.8726
16	19.9544	1.4670	2.3578
17	17.8841	1.4530	2.8648
18	18.0229	1.4393	2.8641
19	19.7588	1.4768	2.6635
20	20.1889	1.4719	2.3582
21	18.0241	1.4090	2.8826
22	19.5407	1.4360	2.5165
23	17.8441	1.3536	3.0176
24	19.9156	1.4660	2.3549
25	18.0284	1.4144	2.9802
26	17.1650	1.4211	2.9393
27	19.9558	1.4673	2.3556
28	17.7664	1.3746	2.9264
29	18.2569	1.4577	2.8359
30	19.6666	1.4251	2.5299
31	17.0873	1.4293	3.1079
32	17.9740	1.3943	2.8763
33	20.3991	1.4692	2.3779
34	20.2892	1.4411	2.6437
35	20.0144	1.4659	2.3499
36	19.8761	1.4320	2.5071
37	18.2855	1.4643	2.9359
38	19.8545	1.4827	2.6954
39	18.3079	1.3601	2.9690
40	20.1690	1.4369	2.4625
均值	18.6330	1.4323	2.7450
标准差	1.1847	0.0320	0.2529

注: k_2' 为均值回复速度, μ_2' 为长期均值, σ_2' 为波动率, H_2 为赫斯特指数。

附表 5 2022 年 40 次目标模型参数间接推断估计的实证结果, $H_3 = 0.8690$

次数	k_3'	μ_3'	σ_3'
1	103.2041	1.3127	1.2334
2	102.8781	1.3142	1.3455
3	103.2192	1.3118	1.2221
4	102.5510	1.3118	1.2153
5	103.4937	1.3168	1.3772
6	103.0849	1.3125	1.2267
7	102.7592	1.3119	1.3537
8	103.9876	1.3181	1.4919
9	102.1427	1.3115	1.4489
10	103.5365	1.3154	1.3817
11	103.1781	1.3150	1.2293
12	103.2209	1.3153	1.2363
13	104.5259	1.3174	1.1948
14	103.1429	1.3161	1.2524
15	103.2313	1.3148	1.3777
16	102.8826	1.3138	1.3460
17	102.9984	1.3151	1.2628
18	101.9135	1.3118	1.4319
19	104.0247	1.3169	1.4958
20	104.0492	1.3160	1.4604
21	102.8815	1.3164	1.3800
22	103.5993	1.3163	1.3427
23	104.4200	1.3170	1.2065
24	102.8160	1.3136	1.3436
25	103.6013	1.3179	1.3542
26	103.0508	1.3138	1.2271
27	102.8875	1.3118	1.3521
28	104.0807	1.3184	1.1661
29	103.5865	1.3158	1.3823
30	103.3853	1.3134	1.2853
31	102.5183	1.3130	1.2099
32	103.0299	1.3141	1.2344
33	103.3093	1.3154	1.2218
34	101.9766	1.3093	1.4293
35	103.3661	1.3130	1.3166
36	103.3517	1.3154	1.3277
37	103.0762	1.3165	1.4046
38	104.2079	1.3180	1.4226
39	101.6237	1.3103	1.4521
40	101.4244	1.3104	1.4589
均值	103.1554	1.3145	1.3275
标准差	0.7055	0.0024	0.0945

注: k_3' 为均值回复速度, μ_3' 为长期均值, σ_3' 为波动率, H_3 为赫斯特指数。

参考文献

- [1]余卫军. 分数 O-U 过程的贝叶斯分析及其应用[D]. 华东师范大学, 2004.
- [2]Araneda A A, Bertschinger N. The Sub-fractional CEV Model[J]. Physica A:Statistical Mechanics and its Applications, 2021, 573(C).
- [3]Gourieroux C, Monfort A. Simulation-Based Econometric Models[M]. Oxford University Press, Oxford, 1996.
- [4]Laurini M P, Hotta L K. Indirect Inference in Fractional Short-term Interest Rate Diffusions[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2013, 94:109–126.